Optique géométrique - Relations de Snell-Descartes

Exercice n°1 (★)

Le rayon laser utilisé à l'observatoire du CERGA pour mesurer la distance Terre-Lune est obtenu par doublage de fréquence à partir d'un laser de longueur d'onde $\lambda_1 = 1{,}064\ \mu m$.

1. Quelle est la longueur d'onde λ_2 de la lumière envoyée vers la lune ? Quelle est sa couleur ?
2. On envoie en fait des impulsions durant $0{,}1\ ns$. Calculer le nombre d'oscillations du signal lumineux dans une impulsion.

Exercice n°2 (★)

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \text{ avec } E_1 = -13{,}6\ eV$$

On rappelle la valeur de la constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J.s$

1. Déterminer et classer les fréquences d'émission obtenues lors de la transition d'un niveau de nombre quantique variant de 3 à 7 et le niveau 2. Dans quel domaine spectral se situent ces raies ?
2. Aurait-on pu obtenir une transition émettant dans le visible en mettant en jeu le niveau fondamental ($n = 1$) ?
3. Chaque raie est élargie par l'effet Doppler qui est dû au mouvement d'agitation des atomes dans l'ampoule qui contient la vapeur atomique. L'expression de cet élargissement est $\Delta\nu = \nu \times \frac{\mathrm{v}}{c}$ où v désigne la vitesse des atomes. Pour une vitesse de l'ordre de $10^3\ m.s^{-1}$, quel ordre de grandeur peut-on proposer pour la largeur des raies précédentes ?
4. Le spectre reste-t-il bien discret si l'on tient compte de l'effet Doppler ?

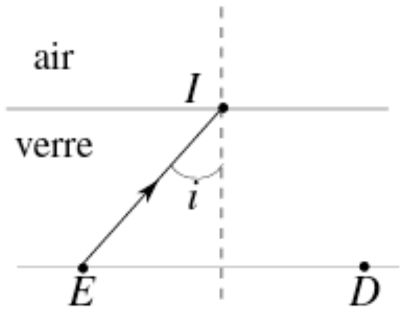
Exercice n°3 (★)

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

1. Trouver l'angle d'incidence i_B, appelé angle de Brewster, pour lequel ces deux rayons sont perpendiculaires entre eux.
2. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice $n = 1{,}33$, puis d'un verre d'indice $n = 1{,}5$.

Exercice n°4 (★ ★)

On modélise un pare-brise par une lame à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5\ mm$, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issu d'un émetteur E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre/air en I avec un angle d'incidence $i = 60°$.



1. Montrer que le flux lumineux revient intégralement sur le détecteur situé en D et déterminer la distance ED.
2. Lorsqu'il pleut, une lame d'eau d'indice $n_e = 1{,}33$ et d'épaisseur $e' = 1\,mm$ se dépose sur le pare-brise. Représenter le rayon lumineux dans ce cas. A quelle distance du détecteur arrive-t-il ?

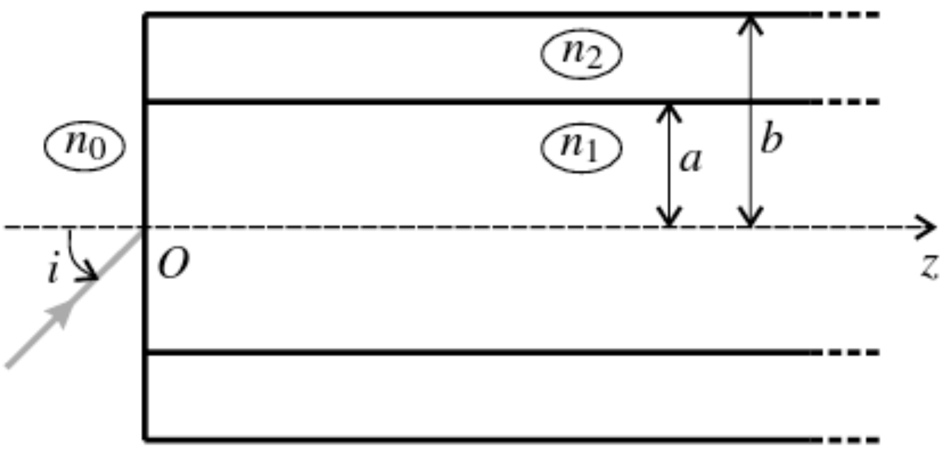
Exercice n°5 (★★)

Une lame à faces parallèles d'épaisseur $e = 1\,cm$ en verre d'indice $n = 1{,}5$ est plongée dans l'air d'indice $1{,}0$. Un rayon lumineux arrive sur la lame avec une incidence i. Déterminer l'expression du déplacement latéral d du rayon.
Commencer par faire un schéma avant de se lancer dans les calculs. Donner la valeur de d_{app} dans le cas limite de i faible.

A.N : $i = \frac{\pi}{3}$; $i = \frac{\pi}{10}$; $i = \frac{\pi}{100}$

Exercice n°6 (★★★)

Le guidage de la lumière peut être assuré par une fibre optique. Une fibre optique est constituée d'un cylindre de verre (ou de plastique) appelé coeur, entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction plus faible. La gaine contribue non seulement aux propriétés mécaniques de la fibre mais évite aussi des fuites de lumière vers d'autres fibres en cas de contact. Actuellement, le diamètre du coeur d'une fibre varie entre $3\,\mu m$ à $200\,\mu m$ selon ses propriétés et le diamètre extérieur de la gaine peut atteindre $400\,\mu m$.

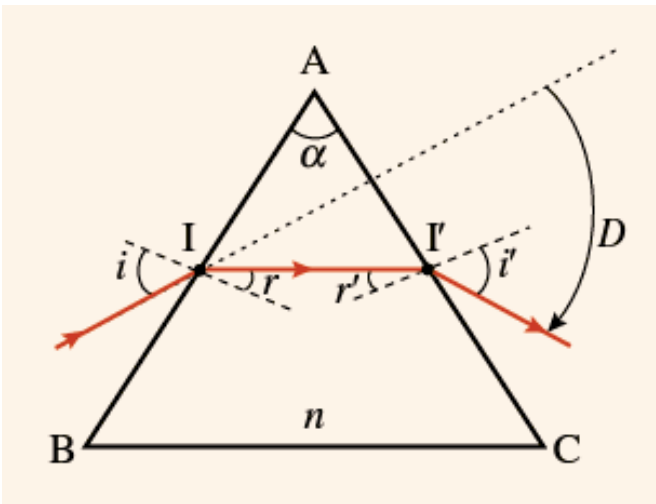


On considère une fibre optique constituée d'un coeur de rayon a et d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon b. Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires à l'axe du cylindre (Oz) formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 qui sera pris égal à l'indice de l'air pour les applications numériques.

1. Un rayon lumineux arrive en O. On appelle i l'angle d'incidence sur la surface d'entrée de la fibre. Déterminer en fonction de n_0, n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le coeur. On appelle angle d'acceptance i_a de la fibre, la valeur maximale de i. Donner l'expression de i_a.
2. On appelle ouverture numérique ON de la fibre, la quantité $ON = n_0 \sin(i_a)$. Exprimer ON en fonction de n_1 et n_2. Application numérique : calculer la valeur de ON pour $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone).
3. On envoie dans la fibre un faisceau lumineux avec tous les angles d'incidence i compris entre 0 et i_a. Calculer la différence $\delta\tau$ entre la durée maximale et la durée minimale de propagation d'un bout à l'autre de la fibre. On exprimera le résultat en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1, n_2 et de la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3.10^8 \, m.s^{-1}$. Application numérique : pour $L = 1\,km$, donner la valeur de $\delta\tau$.
4. Le signal transporté par la fibre est constitué d'impulsions de durée T_1 à intervalle régulier T. Quelle valeur minimale de T faut-il choisir pour que les impulsions soient distinctes à la sortie de la fibre ? Proposer une définition de la bande passante en bits (ou nombre d'impulsions) par seconde. Comparer la valeur de la bande passante obtenue ici avec celle d'un téléphone portable (64 bits par seconde) et celle de la télévision (100 Mbits par seconde)

Exercice n°7 (★★★)

Un prisme est caractérisé par son indice n et son angle au sommet α. Un rayon lumineux arrive en I et ressort en I' selon le schéma suivant.



1. Établir une relation géométrique simple entre les angles r, r' et α.
2. On appelle D l'angle dont a dévié le rayon après avoir traversé le prisme. Exprimer D en fonction de i, i' et α.

3. Rappeler la loi de Descartes en I et I'. En utilisant la loi de Cauchy, indiquer si la lumière violette est plus ou moins déviée que la lumière rouge.
4. On peut montrer que la déviation D est minimale quand $i = i'$. En déduire que, pour une longueur d'onde donnée, l'indice n s'écrit en fonction de la déviation minimale $D_{\min}$ par :

$$n = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha + D_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

5. On éclaire le prisme avec une lampe à vapeur de mercure, pour laquelle on a mesuré la déviation minimale et obtenu les valeurs de n suivantes :

$\lambda(\mu m)$	0,4047	0,4358	0,4916	0,5461	0,5770
n	1,803	1,791	1,774	1,762	1,757

Montrer que ces mesures sont cohérentes avec la loi de Cauchy et exprimer ses coefficients A et B.

Exercice n°8 (★★★)

Un milieu dispersif est un milieu dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière. Dans ce problème, on s'intéresse à une conséquence du caractère dispersif de l'eau : le phénomène d'arc en ciel. L'indice optique de l'eau est donné par la loi de Cauchy :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Où a et b sont des constantes positives caractéristiques du milieu et λ la longueur d'onde dans le vide.

1. Questions préliminaires
   - 1.a. Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n. On fera un schéma en notant i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction. Exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ exclusivement en fonction de l'indice n et de $\sin(i)$.
   - 1.b. Exprimer en fonction de i et de r la valeur de la déviation du rayon lumineux définie par l'angle entre la direction incidente et la direction émergente orientées dans le sens de propagation.
   - 1.c. Exprimer aussi, à l'appui d'un schéma, la déviation d'un rayon lumineux dans le cas d'une réflexion.
2. Lorsque le soleil illumine un rideau de pluie, on peut admettre que chaque goutte d'eau se comporte comme une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. Dans tout ce qui suit, on considèrera que l'observation est faite par un oeil accommodant à l'infini, c'est-à-dire assimilable à une lentille convergente (cristallin) capable de focaliser sur un écran (rétine) tout faisceau de lumière parallèle issu d'une goutte d'eau.
   On recherche, dans un premier temps, les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle. Pour cela, on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte

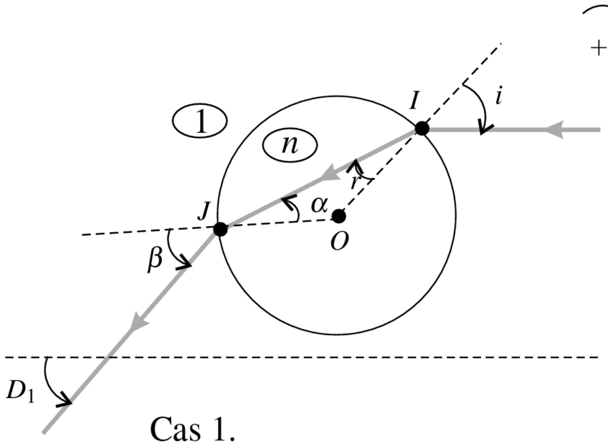
d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation est une fonction de l'angle d'incidence i.

Exprimer la condition de parallélisme des rayons émergents en la traduisant mathématiquement au moyen de la dérivée $\dfrac{dD}{di}$.

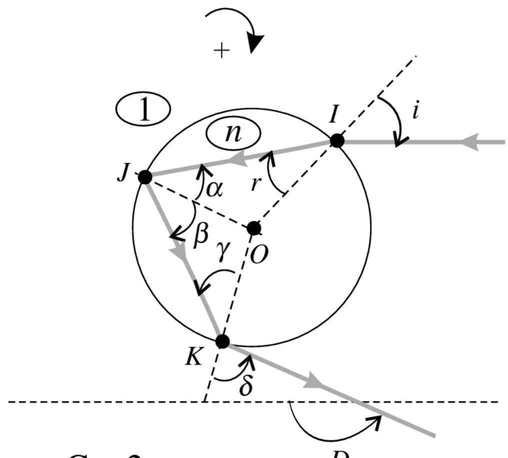
Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O, est atteinte sous des incidences i variables entre $0°$ et $90°$. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

On considère les trois cas représentés sur la figure ci-dessous :

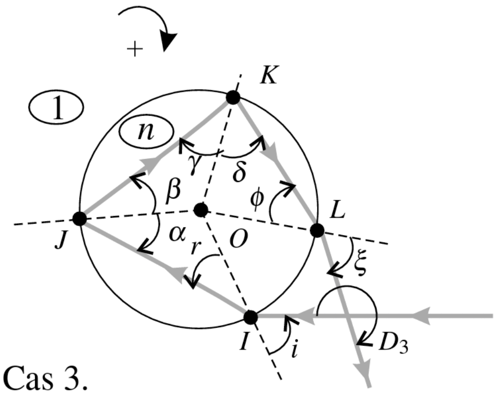
1. Lumière directement transmise
2. Lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte
3. Lumière transmise après deux réflexions partielles à l'intérieur de la goutte



Cas 1.



Cas 2.



Cas 3.

3. Pour le cas 1 :
   3.1. Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r tous les angles marqués de lettres grecques.
   3.2. En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas en fonction de i et de r.
   3.3. Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre $\sin(i)$ et n.
   3.4. Mêmes questions dans le cas 2.
   3.5. Mêmes questions dans le cas 3.
   3.6. Le soleil étant supposé très bas sur l'horizon, normal au dos d'un observateur, montrer que celui-ci ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et

de demi-angles au sommet $\theta_2 = 180° + D_2 = 180° - |D_2|$ (justification de l'arc primaire) et $\theta_3 = D_3 - 180°$ (justification de l'arc secondaire)

3.7. Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe un phénomène d'irisation dû au fait que cet indice évolue en fonction de la longueur d'onde.
Calculer ces angles pour le rouge et le violet, sachant que pour le rouge l'indice vaut $1,3317$ tandis que pour le violet, il est égal à $1,3448$.En admettant que l'observateur se trouve face à un rideau de pluie, dessiner la figure qui apparaît dans son plan d'observation en notant la position respective des rouges et des violets.